$$M_{n+2} = \frac{A_n}{4^{n+1}(n+1)!},$$

where A_n are the numbers of up-down permutations of the numbers $\{0, 1, \ldots, n\}$ (see, for example, [5]).

REFERENCES

1. *Lomtatidze A.G., Půža B., Hakl R.* On periodic boundary value problems for first order functional differential equations // Differential equations. 2003. T. 39. № 3. P. 320–327. [In Russian]

2. *Hakl R., Mukhigulashvili S.* On one estimate for periodic functions// Georgian Math. J. 2005. V. 12. № 1. P. 97–114.

3. *Mukhigulashvili S.* On a periodic boundary value problem for third order linear functional differential equations // Nonlinear Anal. Theory, Methods, Appl., 2007. V. 66. № 2(A). P. 527–535.

4. *Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G.* Inequalities. Moscow: Inostrannaya Literatura, 1946. [Russian translation]

5. *Arnol'd V.I.* The calculus of snakes and the combinatorics of Bernoulli, Euler and Springer numbers of Coxeter groups // Russian Mathematical Surveys. 1992. V. 47. № 1(283). P. 3–45.

Аннотация: Для широкого класса резонансных краевых задач для скалярных функционально-дифференциальных уравнений с положительными операторами получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости.

Ключевые слова: периодическая краевая задача; резонансная краевая задача; функционально-дифференциальные уравнения; константы Фавара; функция Грина.

Бравый Евгений Ильич
к. ф.-м. н., доцент
Пермский государственный
технический университет
Россия, Пермь
e-mail: bravyi@perm.ru

Bravyi Evgeniy
candidate of phys.-math. sciences,
senior lecturer
Perm State Technical University,
Russia, Perm
e-mail: bravyi@perm.ru

УДК 517.911, 517.968

О РЕАЛИЗАЦИИ РАССТОЯНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С МНОГОЗНАЧНЫМИ ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ [1]

© **А. И. Булгаков, Е. В. Корчагина**

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение; многозначные импульсные воздействия.

Аннотация: На множестве решений функционально-дифференциального включения с многозначными импульсными воздействиями рассмотрен вопрос о реализации расстояния в пространстве суммируемых функций от произвольной суммируемой функции до своих значений. Получены эффективные оценки решений задачи Коши.

[1]Работа поддержана грантами РФФИ (№ 07-01-00305, 09-01-97503), научной программой "Развитие научного потенциала высшей школы"(РНП № 2.1.1/1131) и включена в Темплан № 1.6.07.

В монографиях [1-3] исследованы дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. Здесь рассматривается функционально-дифференциальное включение с вольтерровым по А.Н. Тихонову оператором (см. [4]) и многозначными импульсными воздействиями.

Пусть $\mathcal{U} \in [a,b]$ – измеримое по Лебегу множество. Обозначим $\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})$ пространство суммируемых по Лебегу функций $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{L^n(\mathcal{U})} = \int\limits_{\mathcal{U}} |x(s)|ds$, comp $[\mathbb{R}^n]$– множество непустых компактов пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть $S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ – множество всех ограниченных замкнутых выпуклых по переключению (разложимых) (см. [5]) подмножеств пространства $\mathbf{L}_1^n[a,b]$; $\Omega[S(\mathbf{L}_1^n[a,b])]$ – множество всех выпуклых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению (разложимых) подмножеств пространства $\mathbf{L}_1^n[a,b]$.

Пусть $t_k \in [a,b]$ $(a < t_1 < \ldots < t_m < b)$ – конечный набор точек. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ множество всех непрерывных на каждом из интервалов $[a,t_1]$, $(t_1,t_2]$, $\ldots$, $(t_m,b]$ ограниченных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k = 1,2,\ldots,m$, с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$, $\widetilde{\mathbf{C}}_+^1[a,b]$ – множество неотрицательных функций пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^1[a,b]$. Если $\tau \in (a,b]$, то $\widetilde{C}^n[a,\tau]$ – это пространство функций $x : [a,\tau] \to \mathbb{R}^n$, являющихся сужениями на отрезок $[a,\tau]$ элементов из $\widetilde{C}^n[a,b]$ с нормой$\|x\|_{\widetilde{C}^n[a,\tau]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a,\tau]\}$. Пусть $\mathbf{X}$ – произвольное пространство и $U_1, U \subset \mathbf{X}$, тогда $h_{\mathbf{X}}[U_1;U]$– расстояние по Хаусдорфу между множествами U_1 и U в пространстве $\mathbf{X}$, если $\mathbf{X} = \mathbb{R}^n$, то индекс пространства в расстоянии по Хаусдорфу между множествами опускаем.

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} \in \Phi(x), \tag{1}$$

$$\Delta(x(t_k)) \in I_k(x(t_k)),\ k = 1,\ldots,m, \tag{2}$$

$$x(a) = x_0, \tag{3}$$

где отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ непрерывно по Хаусдорфу и удовлетворяет условию: для каждого ограниченного множества $U \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ образ $\Phi(U)$ ограничен суммируемой функцией. Отображения $I_k : \mathbb{R}^n \to \text{comp}\ [\mathbb{R}^n]$, $k = 1,2,...m$ непрерывны по Хаусдорфу, $\Delta(x(t_k)) = x(t_k + 0) - x(t_k)$, $k = 1,2,...m$.

О п р е д е л е н и е 1. *Под решением задачи* (1)-(3) будем понимать функцию $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, для которой существует такое $q \in \Phi(x)$, что при всех $t \in [a,b]$ имеет место представление

$$x(t) = x_0 + \int\limits_a^t q(s)ds + \sum_{k=1}^m \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)), \tag{4}$$

где $\Delta(x(t_k)) \in I_k(x(t_k)),\ k = 1,\ldots,m$.

Предположим, что оператор $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ вольтерров по А.Н. Тихонову.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что множество решений задачи (1)-(3) *почти реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений*, если для любого $v \in \mathbf{L}_1^n[a,b]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое решение $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ задачи (1)-(3), что для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется неравенство

$$\|q - v\|_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})} \leqslant \rho_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[v, \Phi(x)] + \varepsilon\mu(\mathcal{U}), \tag{5}$$

где функция $q \in \Phi(x)$ удовлетворяет равенству (4). Если при $\varepsilon = 0$ в (5) выполняется равенство, то будем говорить, что множество решений задачи (1)-(3) *реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений.*

О п р е д е л е н и е 3. Будем говорить, что множество всех локальных решений задачи (1)-(3) *априорно ограничено*, если найдется такое число $r > 0$, что для всякого $\tau \in (a, b]$ не существует решения y задачи (1)-(3) на $[a, \tau]$, для которого выполняется неравенство $||y||_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} > r$.

Т е о р е м а 1. *Пусть множество всех локальных решений задачи* (1)-(3) *априорно ограничено. И пусть отображение* $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a, b])$ *непрерывно по Хаусдорфу. Тогда множество решений задачи* (1)-(3) *почти реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений. Если* $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \Omega[S(\mathbf{L}_1^n[a, b])]$, *то множество решений задачи* (1)-(3) *реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений.*

О п р е д е л е н и е 4. Будем говорить, что импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \to \text{comp}\,[\mathbb{R}^n]$, $k = 1, 2, ..., m$, *обладают свойством* $\mathcal{A}$, если для каждого $k = 1, 2, ..., m$ найдется непрерывная неубывающая функция $\widetilde{I}_k : \mathbb{R}_+^1 \to \mathbb{R}_+^1$, удовлетворяющая равенству $\widetilde{I}_k(0) = 0$, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется оценка

$$h[I_k(x), I_k(y)] \leqslant \widetilde{I}_k(|x - y|). \tag{6}$$

О п р е д е л е н и е 5. Будем говорить, что импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \to \text{comp}\,[\mathbb{R}^n]$, $k = 1, 2, ..., m$, и отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a, b])$ *обладают свойством* $(\Gamma^{u,\varepsilon,p}, k = 1, 2, ..., m)$, если импульсные воздействия $I_k : \mathbb{R}^n \to \text{comp}\,[\mathbb{R}^n]$, $k = 1, 2, ..., m$, обладают свойством $\mathcal{A}$, и если найдется изотонный непрерывный вольтерров оператор $\Gamma : \widetilde{\mathbf{C}}_+^1[a, b] \to \mathbf{L}_+^1[a, b]$, удовлетворяющий условиям $\Gamma(0) = 0$, для любых функций $x, y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ выполняется неравенство

$$h_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[\Phi(x); \Phi(y)] \leqslant \|\Gamma(Z(x - y))\|_{\mathbf{L}_1^1(\mathcal{U})}; \tag{7}$$

множество всех локальных решений задачи

$$\dot{y} = u + \varepsilon + \Gamma(y), \quad \Delta(y(t_k)) = \widetilde{I}_k(y(t_k)), \quad k = 1, ...m, \quad y(a) = p \tag{8}$$

априорно ограничено. Здесь непрерывное отображение $Z : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \widetilde{\mathbf{C}}_+^1[a, b]$ определено равенством

$$(Zx)(t) = |x(t)|, \tag{9}$$

отображения $I_k : \mathbb{R}^n \to \text{comp}\,[\mathbb{R}^n]$, $k = 1, 2, ..., m$, удовлетворяют неравенству (6), $u \in \mathbf{L}_+^1[a, b]$, числа $\varepsilon, p \geqslant 0$.

Пусть для функции $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ существует функция $\widetilde{q} \in \mathbf{L}^n[a, b]$, что для любого $t \in [a, b]$ имеет место представление

$$y(t) = y(a) + \int\limits_a^t \widetilde{q}(s)ds + \sum_{k=1}^m \chi_{[t_k,b]}(t)\Delta(y(t_k)), \tag{10}$$

где $\Delta(y(t_k)) \in I_k(y(t_k))$, $k = 1, 2, ..., m$. Пусть для функции $\varkappa \in \mathbf{L}_+^1[a, b]$ для каждого измеримого множества $\mathcal{U}$ справедливо соотношение

$$\rho_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[\widetilde{q}; \Phi(y)] \leqslant \int\limits_{\mathcal{U}} \varkappa(s)ds, \tag{11}$$

где функции $\widetilde{q} \in \mathbf{L}_1^n[a, b]$ и $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ удовлетворяют равенству (10).

Т е о р е м а 2. *Пусть для функции* $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ *имеет место представление* (10), *а функция* $\varkappa \in \mathbf{L}_+^1[a, b]$ *для каждого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a, b]$ *удовлетворяет неравенству* (11). *Далее, пусть импульсные воздействия* $I_k : \mathbb{R}^n \to \text{comp}\,[\mathbb{R}^n]$, $k = 1, 2, ..., m$, *и отображение*

$\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *обладают свойством* $(\Gamma^{\varkappa,\varepsilon,p}, k = 1,2,...,m)$, *где* $\varepsilon \geqslant 0$, $p = |x_0 - y(a)|$, x_0- *начальное условие задачи* (1)-(3). *Тогда для любого решения* $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ *задачи* (1)-(3), *удовлетворяющего для любого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *неравенству* (5), *в котором функция* $q \in \mathbf{L}_1^n[a,b]$ *из представления* (4), *а функция* $v = \widetilde{q}$ *из соотношения* (10), *при любом* $t \in [a,b]$ *имеет место оценка*

$$|x(t) - y(t)| \leqslant \xi(\varkappa, \varepsilon, p)(t), \tag{12}$$

и при почти всех $t \in [a,b]$ *справедливо соотношение*

$$|q(t) - \widetilde{q}(t)| \leqslant \varkappa(t) + \varepsilon + (\Gamma(\xi(\varkappa,\varepsilon,p)))(t), \tag{13}$$

где $\xi(\varkappa,\varepsilon,p)-$ *верхнее решение задачи* (8) *при* $u = \varkappa$ *и* $p = |x_0 - y(a)|$.

Т е о р е м а 3. *Пусть для функции* $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ *имеет место представление* (10), *и функция* $\varkappa \in \mathbf{L}_+^1[a,b]$ *для каждого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *удовлетворяет неравенству* (11). *Далее, пусть импульсные воздействия* $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}\,[\mathbb{R}^n]$, $k = 1,2,...,m$, *и отображение* $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *обладают свойством* $(\Gamma^{\varkappa,\varepsilon,p}, k = 1,2,...,m)$, *где* $\varepsilon \geqslant 0$, $p = |x_0 - y(a)|$, x_0- *начальное условие задачи* (1)-(3), *и множество всех локальных решений задачи* (1)-(3) *априорно ограниченно. Тогда при* $\varepsilon > 0$ *существует решение* $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ *задачи* (1)-(3), *для которого при всех* $t \in [a,b]$ *справедлива оценка* (12), *и при почти всех* $t \in [a,b]$ *выполняется соотношение* (13).

Если $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega(S[\mathbf{L}_1^n[a,b]]$, *то утверждение справедливо и при* $\varepsilon = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы теории функционально-дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1987.

2. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. К.: Вища шк., 1987.

3. *Завалищин С.Т., Сесекин А.Н.* Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991.

4. *Тихонов А.Н.* Функциональные уравнения типа Вольтерра и их приложения к некоторым вопросам математической физики // Бюллетень Московского университета. Секция А. 1938. Т. 68. № 4. С. 1-25.

5. *Булгаков А.И., Ткач Л.И.* Возмущение однозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами // Известия ВУЗов. 1999. № 3. С. 3–16.

Abstract: The work is concerned with functional-differential inclusions with multivalued impulses. There is considered the question of realization of the distance (in the space of summable functions) from an arbitrary summable function to the values of a multivalued map acting on the solutions set. The effective estimates of solutions to the Cauchy problem are derived.

Key words: functional-differential inclusion; multivalued impulses.

Булгаков Александр Иванович
д. ф.-м. н., профессор
Тамбовский государственный университет
им. Г.Р. Державина
Россия, Тамбов
e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Alexandr Bulgakov
doctor of phys.-math. sciences, professor
Tambov State University named after
G.R. Derzhavin
Russia, Tambov
e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Корчагина Елена Валерьевна
аспирант
Тамбовский государственный университет
им. Г.Р. Державина
Россия, Тамбов
e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Elena Korchagina
post-graduate student
Tambov State University named after
G.R. Derzhavin
Russia, Tambov
e-mail: aib@tsu.tmb.ru